Om

Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. Bd. X. 9.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1875.

Det er nu fyrgetyve Aar siden Liouville den 8de Juni 1835 forelagde for l'académie des sciences sin Afhandling om Funktionernes Inddeling, trykt i Liouvilles Journal 2. Bind, og lod den følge af Anvendelser, der skabte en Methode til at afgjøre, om et explicit Differential eller en Differentialligning lader sig integrere ved endelige explicite Funktioner, der ikke nødvendigvis alene maa opstaa i Integralregningen, nemlig de, som i videste Forstand ere algebraiske, de logarithmiske og de exponentielle, sammensatte paa en hvilkensomhelst Maade. Saavidt vides har kun Liouville selv i Begyndelsen gjort Brug af Methoden, i lang Tid har den hvilet, og først i den seneste Tid er der her hjemme foretaget Undersøgelser, som bygge videre paa dette vigtige Grundlag. Ingen har senere forsøgt sine Kræfter paa en bedre Fremstilling af denne fortrinlige Methode, der, som et af Liouvilles tidligste Arbeider, ingenlunde er gjennemtrængt af den klassiske Simpelhed, der skal til for at trænge igjennem. Allerede da jeg for nogle Aar siden gjorde den til Gjenstand for en Universitetsforelæsning, trykkede Bevisernes Form mig noget, uden at jeg dog følte mig stærk nok til noget Forsøg paa deres Ændring. Da Hr. Dr. P. C. V. Hansen nylig i sin Disputats (Sætninger om Integration af explicite Differentialer og af Differentialligninger, Kbhvn. 1874) har gjort heldige Anvendelser af Methoden og, iblandt andet, vist, at lineære Differentialligninger af anden Orden med Koefficienter, som ere lineære Funktioner af den uafhængige variable, ikke har endelige explicite Integraler, samt angivet, naar den lineære binomiale Differentialligning af lige Orden kan have saadanne Integraler, og jeg derefter fik bevist, at Dr. Hansens sidstnævnte Resultat lod sig udvide til alle lineære binomiale Differentialligninger (math. Tidsskrift 1874, S. 104), saa følte jeg igjen saavel Savnet af Methodens simple Fremstilling som dennes Vigtighed for dens videre Fremgang. Et Forsøg paa en anden Fremstilling forelægges her, men det væsentlige Indhold er Liouvilles, Formen er min. Det er vistnok ikke lykkedes at opnaa alle de Forbedringer, jeg kunde ønske, men nogle Beviser og Enkeltheder synes mig simplere, og dog ikke mindre exakte, et Resultat i det mindste er fyldigere. Maalet for Methoden er her Undersøgelsen af de lineære Differentialligninger, der følge nærmest efter den af

Liouville behandlede $y'' - Py = 0$, hvor P er en hel algebraisk rational Funktion. Jeg har nemlig behandlet de to Tilfælde, hvor P har Formerne $\frac{M}{x^m}$ og $\frac{M}{N}$, idet M og N ere hele algebraisk rationale Funktioner, N tillige uden ligestore Faktorer, og i begge Tilfælde fundet, at deres Integration ved endelige explicite Functioner er afhængig af saa mange Betingelser, at den i de fleste Tilfælde er uudførlig, men tillige bestemt Integralets Form, naar det bliver af den anførte Art. Men hver Gang man har foretaget slige Undersøgelser styrkes Overbevisningen om, at de allerfleste Differentialligninger ikke have endelige explicite Integraler, men føre til nye Functionsformer, hvis nærmere Undersøgelse tilhører Integralregningen.

---

1. Har man forelagt

$$y'' - Py = 0, \tag{1}$$

hvor Lagranges Betegnelse for Differentialkoefficienterne af y med Hensyn til x er benyttet, nemlig y', $y'' \ldots y^{(n)}$, og P er en Funktion af x, saa kan man finde en Differentialligning til Bestemmelse af

$$u = y^{\mu}.$$

Man finder heraf

$$u' = \mu y^{\mu-1} y' \tag{2}$$

og med en lille Ændring i Liouvilles Betegnelse (journ. de math. t. IV, S. 429) sættes

$$u_2 = \mu(\mu-1) y^{\mu-2} y'^{\,2},$$

samt almindeligt

$$u_i = \mu(\mu-1) \ldots . (\mu - i + 1) y^{\mu-i} y'^{\,i}. \tag{3}$$

Heraf følger for positive hele k

$$u_{\mu+k} = 0. \tag{4}$$

Af (2) findes nu

$$u'' = \mu y^{\mu-1} y'' + u_2,$$

altsaa ifølge (1)

$$u'' - \mu P u = u_2.$$

Differentiation heraf giver ligefrem

$$u''' - \mu P u' - \mu P' u = 2\mu(\mu-1) y^{\mu-2} y' y'' + u_3,$$

som igjen formedelst (1) frembringer

$$u''' - (3\mu - 2) P u' - \mu P' u = u_3.$$

Fortsættes disse Beregninger ganske paa samme Maade, faas

$$u^{IV} - (6\mu - 8) P u'' - (4\mu - 2) P' u' - \mu P'' u = u_4,$$

$$u^{V} - (10\mu - 20) P u''' - (10\mu - 10) P' u'' - (5\mu - 2) P'' u' - \mu P''' u = u_5 \text{ o. s. v.}$$

I Følge Analogi dannes i Almindelighed heraf, idet $C_{i,\,k}$ betyder Antallet af Kombinationer af k Elementer iblandt i,

$$u^{(i)} - (C_{i,\,2}\mu - 2C_{i,\,3})Pu^{(i-2)} \ldots - (C_{i,\,k+1}\mu - 2C_{i,\,k+2})P^{(k-1)}u^{(i-k-1)} \ldots - \mu P^{(i-2)}u = u_i \ldots (5)$$

Rigtigheden heraf indses, idet en ny Differentiation giver et Resultat, som afhænger af $i+1$ paa samme Maade som (5) af i. Da Differentiationsindices for P og u ligefrem voxe, behøver kun Regningens Virkning paa Koefficienterne at eftervises. Det andet Led vil indeholde $-Pu^{(i-1)}$, som, idet (3) giver

$$u_i' = i(\mu - i + 1)Pu_{i-1} + u_{i+1}, \qquad (6)$$

faar Faktoren

$$(C_{i,\,2} + i)\mu - i(i-1) - 2C_3 = C_{i+1,\,2}\mu - 2C_{i+1,\,3}.$$

Det almindelige Led, hvori findes $-P^{(k-1)}u^{(i-k)}$, faar til Faktor

$$(C_{i,\,k} + C_{i,\,k+1})\mu - 2(C_{i,\,k+1} + C_{i,\,k+2}) = C_{i+1,\,k+1}\mu - 2C_{i+1,\,k+2}.$$

Det sidste Led giver umiddelbart $-\mu P^{(i-1)}u$. Resultatet faaer netop den angivne Form, saa at (5) er rigtig.

Indføres i (5) $i = \mu + 1$ og sættes

$$C_{\mu+1,\,k+1}\mu - 2C_{\mu+1,\,k+2} = E_{k+1}, \text{ altsaa } E_1 = 0,\ E_{\mu+1} = \mu,$$

faas i Følge (4)

$$u^{(\mu+1)} - E_2 Pu^{(\mu-1)} - E_3 P'u^{(\mu-2)} \ldots - E_{k+1}P^{(k-1)}u^{(\mu-k)} \ldots - \mu P^{(\mu-1)}u = 0 \qquad (7)$$

som altsaa er en lineær Differentialligning, hvori y^μ er et partikulært Integral.

Da alle lineære Differentialligninger af anden Orden kunne bringes paa Formen (1), saa er herved bevist

Liouvilles Theorem.

Enhver Potens med positiv hel Exponent af et partikulært Integral af en lineær Differentialligning af anden Orden er partikulært Integral af en lineær Differentialligning, hvis Orden er 1 højere end Potensexponenten, tilmed saaledes sammensat, at Koefficienterne til Differentialkoefficienterne af den højeste og den næsthøjeste Orden ere henholdsvis 1 og 0, medens de andre ere Funktioner af x, afhængige af de Funktioner, der indgaa i den givne Ligning.

Den i (5) fremsatte almindelige Lov for Koefficienterne har Liouville ikke angivet.

2. Ere $y_1, y_2, \ldots y_n$ flere partikulære Integraler af (1), saa gjælder Liouvilles Theorem om Potenser af dem alle med samme positive hele Exponent, altsaa vil ogsaa

$$y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_n^\mu = \Sigma y^\mu$$

være et partikulært Integral af (7).

Men forestille y_1 og y_2 to forskjellige partikulære Integraler af (1), saadanne, som ikke have et konstant Forhold, saa er det fuldstændige Integral

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ,$$

idet c_1 og c_2 ere arbitrære konstante. Dannes heraf partikulære Integraler ved at der tillægges c_1 og c_2 Værdier, som henholdsvis a_1 og a_2, b_1 og b_2 ...., saa vil man altsaa kunne sætte

$$u = (a_1 y_1 + a_2 y_2)^\mu + (b_1 y_1 + b_2 y_2)^\mu + \ldots\ldots$$

eller

$$u = A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + A_3 y_1^{\mu-2} y_2^2 + \ldots + A_{\mu+1} y_2^\mu . \qquad (8)$$

Da nu heri de valgte Værdier for Konstanterne ere ganske vilkaarlige, kan det samme siges om A_1, A_2, ... $A_{\mu+1}$, der afhænge deraf, saa at (8) maa være det fuldstændige Integral af (7). De forskjellige partikulære Integraler af (7) ere altsaa y_1^μ, $y_1^{\mu-1} y_2$, ... y_2^μ.

De partikulære Integraler af (7) kunne ogsaa dannes ved Multiplikation af hvilkesomhelst μ af (1). Thi sættes

$$U = y_1 y_2 \ldots y_\mu ,$$

saa faas

$$U' = y_1' y_2 \ldots y_\mu + y_1 y_2' \ldots y_\mu + \ldots\ldots + y_1 y_2 \ldots y_\mu'$$

eller kortere

$$U' = \Sigma y_1' y_2 \ldots y_\mu .$$

Fremdeles bruges Betegnelsen

$$U_2 = 2 \Sigma y_1' y_2' \ldots y_\mu$$

og almindeligt

$$U_i = [i] \Sigma y_1' y_2' \ldots y_i' y_{i+1} \ldots y_\mu ,$$

hvoraf følger

$$U_\mu = [\mu] y_1' y_2' \ldots y_\mu' ,$$

medens derimod

$$U_{\mu+1} = 0 ,$$

da Index angiver Antallet af Faktorer i Produktet, som skulle være deriverede Funktioner, og det kan ikke overskride Faktorernes hele Antal.

Ved Differentiation af U' dannes nu

$$U'' = \Sigma y_1'' y_2 \ldots y_\mu + U_2 = \mu P U + U_2$$

eller

$$U'' - \mu P U = U_2 .$$

Heraf findes igjen

$$U''' - \mu P U' - \mu P' U = 2 \Sigma y_1'' y_2' \ldots y_\mu + U_3 ,$$

men

$$\begin{aligned} y_1'' y_2' \ldots y_\mu &= P y_1 y_2' \ldots y_\mu \\ y_1'' y_2 y_3' \ldots y_\mu &= P y_1 y_2 y_3' \ldots y_\mu \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1'' y_2 y_3 \ldots y_\mu' &= P y_1 y_2 y_3 \ldots y_\mu' \end{aligned}$$

danne en Gruppe af $\mu - 1$ Udtryk, og naar man istedenfor y_1'' tager y_2'', y_3'' ... eller y_μ'', saa danner man hver Gang en ny Gruppe, i alt altsaa μ Grupper, der dog ogsaa kunne betragtes som $\mu - 1$ Grupper af Formen $P\Sigma y_1' y_2 \dots y_\mu = U'$. Man faar altsaa

$$U''' - \mu P U' - \mu P' U = 2(\mu - 1) U' + U_3,$$

hvoraf

$$U''' - (3\mu - 2) P U' - \mu P' U = U_3.$$

Denne Ligning har ganske samme Form, som den i 1 fundne, der er af tredie Orden med Hensyn til u. For at indse, at Overensstemmelsen imellem Ligningerne i U og u maa vedblive, behøver man blot at vise, at

$$U_3' = 3(\mu - 2) P U_2 + U_4$$

og de analoge med højere Indices. Umiddelbart faar man

$$U_3' = 3.2 \Sigma y_1'' y_2' y_3' \dots y_\mu + U_4$$

og heri er

$$y_1'' y_2' y_3' y_4 \dots y_\mu = P y_1 y_2' y_3' y_4 \dots y_\mu,$$

ligesom alle de analoge Udtryk tilstede lignende Omskrivninger. Af denne Art gives der μ Grupper, indeholdende Py_1, Py_2, Py_3, ... Py_μ og forresten to første deriverede Funktioner, $\mu - 2$ primitive, altsaa i hver Gruppe $(\mu - 1)$ $(\mu - 2)$ Udtryk. Men dette Antal kan ogsaa deles i $\mu - 2$ Grupper, indeholdende to Differentialkoefficienter og $\mu - 2$ primitive Funktioner, altsaa $\mu(\mu - 1)$ i hver. Dermed er Rigtigheden af det angivne Udtryk for U_3' vist og paa denne Maade kan man fortsætte. Størrelser af den for U angivne Form ere altsaa partikulære Integraler af (7). Beviset kan ikke forudsætte, at y_1, $y_2 \dots y_\mu$ ere indbyrdes forskjellige, saa at Produkter af Potenser af y_1, $y_2 \dots y_n$, hvis Exponenters Sum er μ, ligeledes maa være partikulære Integraler af (7).

3. Naar P i (1) har Formen

$$P = A_m x^{-m} + \dots A_1 x^{-1} + B + C_1 x + \dots C_n x^n = \frac{M}{x^m}, \tag{9}$$

saa vil u ikke være algebraisk rational med en Nævner, hvori der kan forekomme Faktorer af Formen $(x - \alpha)^\beta$; thi saa vilde der paa venstre Side af (7) ved Brøkernes Dekomposition forekomme et Led og kun et Led med den højeste Exponent $\beta + \mu + 1$ ved $x - \alpha$ i Nævneren, saa at (7) ikke kan blive tilfredsstillet.

Derimod ses der ikke umiddelbart at være noget til Hinder for, at u faar Formen

$$u = K_\gamma x^{-\gamma} + \dots K_1 x^{-1} + L + M_1 x + \dots M_\delta x^\delta = \frac{\Gamma}{x^\gamma},$$

hvor Γ er et helt rationalt Polynomium. Betragter man de Exponenter, som x faar ved Indførelse af dette u i (7), saa findes først de laveste Exponenter at være

i første Led: $-(\gamma + \mu + 1)$; og i de andre: $-(m + \gamma + \mu - 1)$.

Da der ingen andre Led findes, som kunne ophæve det første, maa disse Led alle faa samme Exponent, saa at

$$\gamma + \mu + 1 = m + \gamma + \mu - 1 ,$$

altsaa

$$m = 2 .$$

Men under denne Forudsætning vilde ogsaa i det mindste flere af de følgende Led i (7) faa Exponenter, som ere 1, 2, 3... Enheder mindre, og saaledes kunne hæve hverandre. Det kommer blot an paa, om dette Forhold vil vedblive hele Rækken af Led igjennem op til dem, som have de højeste Exponenter. Men disse ere ganske af samme Form som de laveste, blot indeholnende δ for $-\gamma$ og n for $-m$; man maa altsaa faa

$$\delta - \mu - 1 = n + \delta - \mu + 1 ,$$

hvoraf

$$n = -2 .$$

Dette viser, at P maa reduceres til et eneste Led, altsaa

$$P = \frac{k}{x^2} , \tag{10}$$

hvis u skal være algebraisk rational, og i saa Tilfælde er det ganske overflødigt at foretage videre Undersøgelse om u, fordi Differentialligningen da har en vel bekjendt integrabel Form.

Man vil nu let kunne vise, at (1) med Formen (9) for P ((10) dog undtagen) ikke kan have noget algebraisk Integral i videste Forstand, det vil sige, som er Rod i en irreductibel algebraisk Ligning i y med Koefficienter, der ere algebraisk rationale Funktioner af x, nemlig

$$V = y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \ldots . + X_{m-1} y + X_m = 0 . \tag{11}$$

Rødderne af denne Ligning tilfredsstille nemlig ogsaa

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' = 0 ,$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + 2 \frac{d^2 V}{dx\, dy} y' + \frac{d^2 V}{dy^2} y'^2 + \frac{dV}{dy} y'' = 0 .$$

Skal nu nogen af dem være partikulært Integral i (1), saa maa ogsaa den algebraiske Ligning, som fremkommer ved Elimination af y' og y'' imellem de to sidste Ligninger og (1), nemlig

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \frac{dV^2}{dy^2} - 2 \frac{d^2 V}{dx dy} \frac{dV}{dy} \frac{dV}{dx} + \frac{d^2 V}{dy^2} \frac{dV^2}{dx^2} + Py \frac{dV^3}{dy^3} = 0 ,$$

være tilfredsstillet af en saadan Rod i Ligningen i y. Men to algebraiske Ligninger, som have nogen Rod fælles, maa enten være begge reductible til Ligninger af lavere Grad, eller den, som er af højest Grad, maa have alle den andens Rødder. Det er det sidste Tilfælde, som foreligger her, saa at ingen Rod i (11) kan være partikulært Integral af (1), uden at de alle ere det. Kaldes Rødderne $y_1, y_2 \ldots y_m$, saa vil ogsaa

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots . y_m^\mu$$

tilfredsstille (7). Men dette er umuligt, fordi u er en symmetrisk Funktion af Rødderne i (11), altsaa en algebraisk rational Funktion af Koefficienterne, tilmed af x, og det er ovenfor vist, at (7) ikke har noget algebraisk rationalt Integral.

4. Hvis det nu skal være muligt at udtrykke y explicite ved x under endelig Form, saa er dertil transcendente Funktioner fornødne. Men hvilke transcendente Integraler man end faar, saa maa dog et af dem have mindre sammensat Form end de andre, det vil sige være transcendent af den laveste Orden. Det maa tilmed indeholde mindst en enkeltleddet transcendent af denne Orden n. Spørgsmaalet bliver da, om denne transcendente Funktion kan være en af de to, $l.v$ eller e^v, idet v er transcendent af $(n-1)^{te}$ Orden; thi dertil kunne henregnes alle transcendente Funktioner, som ikke opstaa alene i Integralregningen.

Man maa nu altsaa først prøve, om (1) har til partikulært Integral

$$y = F(x, l.v), \tag{12}$$

idet F er en algebraisk Funktion af $l.v$, af andre transcendente og algebraiske Funktioner af x. Dertil kræves, idet man sætter $\theta = l.v$, at

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,d\theta}\frac{v'}{v} + \frac{d^2F}{d\theta^2}\frac{v'^2}{v^2} - \frac{dF}{d\theta}\frac{v'^2}{v^2} + \frac{dF}{d\theta}\frac{v''}{v} = PF.$$

Men denne Ligning vil ogsaa tilfredsstilles, naar man sætter μv for v, idet derved ingen af v, v' og v'' afhængig Størrelse udenfor Funktionstegnet F ændres, saa at $l.\mu v$ ligesaa vel maa identisk forsvinde af Ligningen, som $l.v$ gjør det. Man maa altsaa ogsaa have følgende partikulære Integral i (1)

$$y = F(x, l.\mu v).$$

Fremdeles vil Differentiation af (1) med Hensyn til μ, som antages ikke indgaaende i P, give

$$\frac{d^r y''}{d\mu^r} = \frac{d^2 \frac{d^r y}{d\mu^r}}{dx^2} = P\frac{d^r y}{d\mu^r},$$

og det viser, at Differentiation af (13) med Hensyn til μ, saa ofte man vil, giver ligesaa mange andre partikulære Integraler af (1), som det skal være. Da tilmed

$$\frac{d.F(x, l.\mu + l.v)}{d.l.\mu} = \frac{d.F(x, l.\mu + l.v)}{d.l.v},$$

saa kunne de partikulære Integraler ogsaa faas ved Differentiation med Hensyn til $l.v$ og Indførelse af $\mu = 1$, $l.\mu = 0$.

Nu kan man indse, at skjønt $y = 0$ er et partikulært Integral i (1), saa kan dette dog ikke være

$$\frac{d.F(x, l.v)}{d.l.v} = 0,$$

da deraf vilde følge

$$F(x, l.v) = \varphi,$$

hvor φ alene afhænger af algebraiske Funktioner af x og andre Transcendenter end v, men saa kom F ikke til at indeholde $l.v$, imod Forudsætningen.

Ikke heller kunne to konsekutive Differentialkoefficienter af (12) med Hensyn til $l.v$ staa i et konstant Forhold, saasom

$$\frac{d.F(x, l.v)}{d.l.v} = AF(x, l.v);$$

thi deraf vilde følge

$$F(x, l.v) = \varphi e^{A.l.v} = \varphi v^A$$

med samme Betydning af φ, som ovenfor, og saa vilde F være en algebraisk Funktion af v, hvis A var rational og en exponentiel Funktion af $l.v$, altsaa transcendent af Ordenen $n+1$, hvis A var irrational (jfr. Liouville journ. de math. II B. S. 94).

Men skulle alle disse partikulære Integraler tilhøre (1), saa maa dog hver tre af dem staa i saadan Relation som

$$\frac{d^2.F(x, l.v)}{(d.l.v)^2} = A\frac{d.F(x, l.v)}{d.l.v} + BF(x, l.v),$$

thi ellers fik (1) flere end to indbyrdes forskjellige partikulære Integraler, hvilket er umuligt. Men deraf udledes da en af de tre Former

$$F(x, l.v) = \varphi_1 e^{m_1 l.v} + \varphi_2 e^{m_2 l.v},$$
$$F(x, l.v) = (\varphi_1 + \varphi_2 l.v) e^{m\,l.v},$$
$$F(x, l.v) = \varphi_1 + \varphi_2 l.v.$$

De to første ere ikke algebraiske Funktioner af $l.v$ (jfr. Liouville journ. de math. II. B. S. 69) og den sidste vilde give et nyt partikulært Integral

$$\frac{d.F(x, l.v)}{d.l.v} = \varphi_2,$$

som er uafhængigt af $l.v$, imod Antagelsen.

Differentialligningen (1) kan altsaa for P bestemt ved (9) ikke have noget Integral af Formen (12), hvori en Transcendent som $l.v$ indgaar.

5. Derefter skal det undersøges, om (1) har et partikulært Integral af Formen

$$y = F(x, e^v) \tag{14}$$

med samme Betydning af F og v som forhen. Men saa maa, idet $\theta = e^v$,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,d\theta}\theta v' + \frac{d^2F}{d\theta^2}\theta^2 v'^2 + \frac{dF}{d\theta}\theta v'^2 + \frac{dF}{d\theta}\theta v'' = PF.$$

Denne Ligning tilfredsstilles, naar $\theta = e^v$ erstattes ved $\mu\theta = \mu e^v$, fordi alle μ udenfor F forsvinde af Ligningen, saa at den nye Ligning blot indeholder μe^v istedenfor e^v. Heraf følger da, at for alle μ er

$$y = F(x, \mu e^v)$$

ogsaa partikulært Integral af (1). Differentierer man den forelagte Ligning med Hensyn til μ, som antages ikke indgaaende i P, saa vil man ogsaa se, at

$$\frac{d^r y}{d\mu^r} = \frac{d.^r F}{(d.\mu\theta)^r}\theta^r$$

for alle μ og r er partikulært Integral, altsaa for $\mu = 1$ vil

$$y = \theta^r \frac{d.^r F}{d\theta^r}$$

give saadanne Integraler, idet $r = 1, 2, 3 \ldots$.

Et saadant Integral kan ikke være nul, skjønt $y = 0$ tilfredsstiller (1), fordi

$$\theta\frac{dF}{d\theta} = 0$$

vilde give

$$F(x, e^v) = \varphi,$$

uafhængig af e^v imod Forudsætningen.

Et konstant Forhold imellem to Integraler, af hvilke det ene er frembragt af det andet ved Differentiation, vilde give

$$\theta\frac{dF}{d\theta} = AF,$$

altsaa

$$F(x, e^v) = \varphi e^{Av}, \tag{15}$$

en Form, som er i god Overensstemmelse med de gjorte Antagelser.

Men endvidere maa man, hvis der ikke skal gives tre indbyrdes ganske forskjellige partikulære Integraler af (1), have

$$\theta^2\frac{d^2F}{d\theta^2} = A\theta\frac{dF}{d\theta} + BF,$$

saa at man faar en af Formerne

$$F(x, e^v) = \varphi_1 e^{m_1 v} + \varphi_2 e^{m_2 v},$$
$$F(x, e^v) = (\varphi_1 + \varphi_2 v)e^{mv},$$
$$F(x, e^v) = \varphi_1 + \varphi_2 v.$$

Af disse forkastes strax den sidste, som ikke indeholdende e^v og derfor ogsaa transcendent af Ordenen $n-1$ istedenfor n. Den næst sidste er ikke nogen algebraisk Funktion af e^v, med mindre $\varphi_2 = 0$, og saa har Funktionen samme Form (15), som ovenfor fandtes og som kan være rigtig. Endelig vil den første Form

$$y_1 = \varphi_1 e^{m_1 v} + \varphi_2 e^{m_2 v}$$

ved Indførelse af μe^v for e^v give et nyt Integral

$$y_2 = \varphi_1 \mu^{m_1} e^{m_1 v} + \varphi_2 \mu^{m_2} e^{m_2 v},$$

og af disse to dannes et tredie

$$y_3 = \varphi_1 (\mu^{m_2} - \mu^{m_1}) e^{m_1 v},$$

hvorved den to Gange før frembragte Form (15) kommer igjen.

Vilde man nu fremdrage en af transcendenterne af n^{te} Orden i Koefficienten φ i (15), maatte denne ogsaa vise sig at have samme Form, saa at, hvis (1) har noget explicit Integral under endelig Form, uafhængigt af Integrationer, maa det have Formen

$$y = \varphi e^v$$

idet φ og v ere transcendente af Ordenen n.

6. Efter Reglen for Behandlingen af homogene Differentialligninger sættes i (1)

$$y = e^{\int t dx},$$

hvorved der opstaar en Differentialligning af første Orden i t

$$t' + t^2 = P, \tag{16}$$

og deri maa t være af lavere Orden end y, altsaa højest transcendent af Ordenen $n-1$.

Beskaffenheden af t maa nu nærmere bestemmes. Betegner v en transcendent af Ordenen $n-2$ i det højeste, saa kan man prøve, om man kan have

$$t = \varphi(x, e^v),$$

altsaa φ transcendent af højest $(n-1)^{te}$ Orden. Af (16) faas da

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\theta} \theta v' + \varphi^2 = P,$$

som dog ogsaa gjælder for

$$t = \varphi(x, \mu e^v),$$

saa at (1) har det partikulære Integral

$$y = e^{\int \varphi(x, \mu e^v) dx}.$$

I Følge 5 udledes heraf andre Integraler ved Differentiation med Hensyn til $\theta = e^v$, hvori tilmed kan sættes $\mu = 1$. Man har da

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, e^v) dx},$$

$$y_2 = e^{\int \varphi(x, e^v) dx} \int \frac{d\varphi}{d\theta} dx = y_1 z .$$

Disse to partikulære Integraler opfylde Betingelsen

$$y_1 \frac{d^2 y_2}{dx^2} - y_2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0,$$

altsaa ogsaa

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C.$$

Indføres heri $y_2 = y_1 z$, faar man

$$y_1{}^2 \frac{dz}{dx} = y_1{}^2 \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

Hvis nu $C = 0$, saa bliver

$$\varphi(x, e^v) = \psi$$

uafhængig af e^v, imod Forudsætningen. Er $C \lesseqgtr 0$, bliver

$$y_1 = \sqrt{\frac{C}{\frac{d\varphi}{d\theta}}},$$

følgelig y_1 transcendent af ikke höjere Orden end t, tvertimod Antagelsen. t kan altsaa ikke indeholde e^v.

Derefter undersøges om

$$t = \varphi(x, l.v).$$

Med $l.v = \theta$ vilde dette indsat i (16) give

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{v'}{v} + \varphi^2 = P,$$

hvor atter μv kan sættes for v, saa at man ogsaa fik

$$y = e^{\int \varphi(x, l.\mu v) dx}$$

og deraf igjen nye Integraler ved Differentiation med Hensyn til $\theta = l.v$ og $\mu = 1$, altsaa

$$y_1 = e^{\int \varphi(x, l.v) dx},$$

$$y_2 = e^{\int \varphi(x, l.v) dx} \int \frac{d\varphi}{d\theta} dx = y_1 z .$$

Heraf kan atter faas

$$y_1{}^2 \frac{dz}{dx} = y_1{}^2 \frac{d\varphi}{d\theta} = C.$$

Enten har man nu $C = 0$, altsaa Funktionen φ uafhængig af $l.v$, som strider imod det antagne, eller man har C forskjellig fra nul, og saa bliver atter

$$y = \sqrt{\frac{C}{\frac{d\varphi}{d\theta}}},$$

altsaa y ikke af höjere Orden end t, hvilket er urimeligt. Da saaledes t heller ikke kan indeholde $l.v$, saa maa den være en algebraisk Funktion af x, hvis den kan fremstilles explicite under endelig Form.

7. Dersom t er en algebraisk Funktion af x i videste Forstand, saa kan den være Rod i en irreduktibel algebraisk Ligning af Graden q, saasom

$$S = t^q + X_1 t^{q-1} + \dots X_{q-1} t + X_q = 0, \tag{17}$$

hvori Koefficienterne ere rationale Funktioner af x. Men denne Lignings Rødder tilfredsstille ogsaa

$$\frac{dS}{dx} + \frac{dS}{dt} t' = 0,$$

saa at de Værdier af t, som tillige ere Integraler af (16), maa tilfredsstille den Ligning, der fremkommer ved Elimination af t' imellem denne Ligning og (16), nemlig

$$\frac{dS}{dx} + \frac{dS}{dt}(P - t^2) = 0.$$

Da denne Ligning altsaa har Rødder tilfælles med den irreduktible algebraiske Ligning i t, saa maa alle dennes Rødder tilfredsstille den sidste. Betegnes de med $t_1, t_2, t_3 \dots$, saa skal man have de partikulære Integraler af (1)

$$y_1 = e^{\int t_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \quad y_3 = e^{\int t_3 dx} \dots$$

Hvilkesomhelst to af disse maa tilfredsstille en Differentialligning som

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C$$

eller

$$y_1 y_2 (t_2 - t_1) = C.$$

Her kan man ikke have $y_2 = c_1 y_1$, da det vilde give $C = 0$, altsaa

$$t_2 = t_1,$$

og Ligning (17) var ikke irreduktibel. Men er C forskjellig fra nul, saa bliver $y_1 y_2$ en algebraisk Funktion af x ligesom t_1 og t_2, som i Følge 2 (jfr. (8)) er et partikulært Integral af (7) for $\mu = 2$, og det er forhen vist, at denne Ligning ikke kan have noget algebraisk Integral. Heraf bliver det en nødvendig Følge, at Ligning (17) maa være af første Grad i t, eller at t maa være en algebraisk rational Funktion af x, hvis (1) har et endeligt explicite ved x udtrykt Integral.

8. Naar t skal være algebraisk rational, saa kan man efter en Dekomposition give den Formen

$$t = H + \Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha}, \tag{18}$$

hvor H er et helt rationalt Polynomium af Graden h, K konstant. I (1) er P ligeledes sammensat af en hel og en brudden Del, som her kortere gjengives saaledes

$$P = \frac{M}{x^m} = Q + \frac{R}{x^m},$$

hvor Q og R blive henholdsvis af n og $m-1$ Grad.

Indfører man Udtrykket (18) i (16), findes

$$H' - \Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + H^2 + 2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha}\right)^2 = Q + \frac{R}{x^m},$$

som indeholder de hele Led

$$H' + H^2 + H_1 - Q$$

og de brudne,

$$-\Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + \Sigma \frac{L}{(x-p)^\alpha} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha}\right)^2 - \frac{R}{x^m},$$

idet

$$+2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} = H_1 + \Sigma \frac{L}{(x-p)^\alpha},$$

hvor H_1 er hel i det höjeste af $(h-1)^{te}$ Grad og L konstant.

De fire hele Led kunne ikke blive identisk lig nul, med mindre Q og H^2 ere af samme Grad, altsaa

$$n = 2h.$$

Heraf følger, at (1) med P af Formen (9) ikke har noget Integral under endelig explicit Form, naar P er af ulige Grad. Fremdeles kræves til et saadant Integral, at H er de hele Led i $\sqrt{Q}$, medens den Rest ϱ, der udkommer efter Roduddragningen og som i det höjeste er af Graden $h-1$, bestemmer

$$H_1 = \varrho - H'.$$

Sætter man

$$H = bx^h + b_1 x^{h-1} + \ldots . b_{h-1} x + b_h$$

og

$$\varrho = gx^{h-1} + g_1 x^{h-2} + \ldots . g_{h-2} x + g_{h-1},$$

vil H_1 være bestemt.

De brudne Led, som indkomme i (16), naar Udtrykket (18) indføres for t, kunne til Dels være saadanne, hvor Størrelserne p ikke ere nul, men for at de brudne Led i P skulle kunne forsvinde, maa der ogsaa findes andre, som have $p = 0$.

Ere $p_1, p_2 \dots p_r$ ikke nul, saa bestemmes de tilsvarende Tællere $K_1, K_2 \dots K_r$ og Exponenter $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ deraf, at saadanne Led med samme p maa ophæve hverandre. Men dertil kræves for alle Indices

$$2\alpha = \alpha + 1 \;, \quad K^2 - \alpha K = 0 \;,$$

altsaa

$$\alpha = 1 \;, \qquad K = 1 \;,$$

idet $K = 0$ maa forkastes.

Men et Led i (18) af Formen $\frac{K}{x^\alpha}$ vil kun forsvinde, naar

$$2\alpha = m \;,$$

altsaa m maa være et lige Tal. En Differentialligning af Formen (1) med en ulige Exponent for Nævneren i P af Formen (9) har altsaa intet endeligt explicite udtrykt Integral.

Men nu kræves der iøvrigt til, at Leddet med x^α skal forsvinde, efterat være indført i (16), at Koefficienterne blive ligestore paa Ligningens to Sider. Dette kan ske paa to Maader. Hvis $2\alpha > \alpha + 1$ eller $\alpha > 1$, saa maa

$$K^2 = A_m \,.$$

Men hvis $\alpha = 1$, saa ville Nævnerne $x^{2\alpha}$ og $x^{\alpha+1}$ begge blive lig x^m, idet

$$m = 2$$

og man faar da

$$K^2 - K = A_2 \,.$$

Derefter har man to forskjellige Former af t; nemlig

$$\text{for } m > 2: \qquad t = H + \frac{1}{x - p_1} + \frac{1}{x - p_2} + \dots \frac{1}{x - p_r} + \frac{N}{x^{\frac{1}{2}m}} \,, \tag{19}$$

idet N er et Polynomium af Graden $\frac{1}{2}m - 1$ i det höjeste og med det konstante Led $\sqrt{A_m}$; derimod er

$$\text{for } m = 2: \qquad t = H + \frac{1}{x - p_1} + \frac{1}{x - p_2} + \dots \frac{1}{x - p_r} + \frac{K}{x} \,. \tag{20}$$

9. I det sidste Tilfælde har man

$$P = H^2 + \varrho + \frac{A_2 + A_1 x}{x^2} \tag{21}$$

og da skal (1) have til partikulært Integral

$$y = X x^K e^{\int H dx}, \tag{22}$$

idet K findes af

$$K^2 - K = A_2 \tag{23}$$

og X er et helt rationalt Polynomium

$$X = x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_{r-1} x + c_r \,, \tag{24}$$

hvis Grad og hvis Koefficienter maa findes ved de ubestemte Koefficienters Methode.

Indføres (21) og (22) i (1), faar man ved Subtraktion fjernet $(K(K-1)+H^2x^2)Xx^{K-2}e^{\int Hdx}$ og efter Division med $x^{K-1}e^{\int Hdx}$

$$xX'' + 2(K+Hx)X' + (2KH + H'x)X - (\varrho x + A_1)X = 0 \,.$$

For at heri Leddene af den højeste Orden $r+h$ skulle forsvinde, maa

$$(2r+2K+h)b - g = 0$$

eller

$$2r = \frac{g}{b} - 2K - h \,. \tag{25}$$

Da nu h er positiv hel og det samme skal gjælde om r, saa maa $\frac{g}{b} - 2K$ være hel ikke mindre end h. Er altsaa K irrational eller brudden, saa maa det samme gjælde om $\frac{g}{b}$. Ligeledes maa $\frac{g}{b} - 2K - h$ være et lige Tal.

Heraf følger, at naar (1) med P af Formen (21) ikke har til Integral (22), idet (23)—(25) gjælde, saa har den intet endeligt explicit Integral.

For at (22) virkelig skal være et saadant Integral, maa $r+h+1$ Relationer finde Sted imellem Koefficienterne i H, ϱ og X, A_1 og K. Heraf maa da kunne findes endelige Værdier for $c_1, c_2 \dots c_r$, foruden det ved (25) bestemte r, hvorefter der vil dannes h Betingelsesligninger imellem de forskjellige b og g, samt A_1 og K; ere disse ikke opfyldte, har Differentialligningen intet endeligt explicit Integral.

10. Det simpleste Tilfælde, som falder ind herunder, synes at være det, hvor

$$\frac{g}{b} - 2K = h \,, \quad r = 0 \,,$$

idet derved $X = 1$. Med Formen (21) for P faar man da

$$y = x^K e^{\int Hdx}.$$

Indsættes det i (1), faar man efter behørig Reduktion (jfr. 9)

$$2KH + H'x - (\varrho x + A_1) = 0 \,,$$

hvis Identitet kræver foruden $g = (2k+h)b$, der var givet,

$$A_1 = 2Kb_h \,, \; g_{h-1} = (2K+1)b_{h-1} \,, \; g_{h-2} = (2K+2)b_{h-2} \,, \dots g_1 = (2K+h-1)b_1 \,.$$

Tilmed maa bemærkes, at H, som fremkommer ved en Kvadratrods Uddragning, kan tages positiv eller negativ, saa at de i disse Formler indgaaende b maa tages henholdsvis positive eller negative. Heraf faas følgende

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{A_2 + A_1 x}{x^2}\right) y = 0 ,$$

hvor H og ϱ ere hele algebraisk rationale Funktioner af x, henholdsvis af h og $h-1$ Grad, er kun integrabel ved endelige explicite Funktioner, hvis

$$\begin{aligned} H &= \pm(bx^h + b_1 x^{h-1} + \dots + b_h) , \\ \varrho &= \pm\left((2K+h)bx^{h-1} + (2K+h-1)b_1 x^{h-2} + \dots + (2K+1)b_{h-1}\right) , \\ A_1 &= 2Kb_h , \\ \text{og } A_2 &= K(K-1) , \end{aligned}$$

og har da det partikulære Integral

$$y = x^K e^{\pm\int H dx}.$$

11. Naar $\alpha > 1$, giver (19)

$$y = Xe^{\int(H + Nx^{-\frac12 m})dx} \tag{26}$$

med samme Betydning af X som forhen og

$$P = H^2 + \varrho + \frac{M}{x^m} . \tag{9}$$

Derved udledes af (1) efter Division med $x^{-m}e^{\int(H+Nx^{-\frac12 m})dx}$

$$x^m X'' + 2(Hx^m + Nx^{\frac12 m})X' + (2Hx^{\frac12 m}N + N^2 - M - \varrho x^m + H'x^m + x^{\frac12 m}N' - \tfrac12 m N x^{\frac12 m-1})X = 0 .$$

Leddene af den höjeste Orden $r+h+m-1$ forsvinde, naar

$$(2r + 2d + h)b - g = 0 ,$$

idet

$$N = dx^{\frac12 m-1} + d_1 x^{\frac12 m-2} + \dots + d_{\frac12 m-2}x + \sqrt{A_m} .$$

Heraf findes

$$2r = \frac{g}{b} - 2d - h , \tag{27}$$

afhængig af d, som ikke er bestemt endnu. Heri maa $\frac{g}{b} - 2d - h$ være et positivt lige helt Tal (hvorunder 0), altsaa ogsaa $\frac{g}{b} - 2d$ større end eller lig med h.

Men hele den ovenstaaende identiske Ligning i x af Graden $r+h+m-1$, kan ved Division med x blive 1 Grad lavere, fordi $N^2 - M$ er delelig med x, da N indeholder det konstante Led $\sqrt{A_m}$ og M indeholder A_m (jfr. 8). De $r+h+m-1$ Ligninger, som dannes ved at sætte Koefficienterne lig nul, tjene til Bestemmelse af $r+\frac{1}{2}m$ Størrelser, nemlig foruden Exponenten r ogsaa r Koefficienter i X, $\frac{1}{2}m-1$ i N. Naar disse ere fundne, bliver der dannet $h+\frac{1}{2}m-1$ Betingelser, som Koeficienterne b, c, g og A med forskjellige Indices skulle opfylde. Gjøre de ikke det, har Differentialligningen ingen endelig explicit Funktion til partikulært Integral.

Udbyttet af denne Undersøgelse er, at den her omhandlede Differentialligning kun sjeldent tilsteder et endeligt explicit Integral; det finder sit Udtryk i følgende almindelige

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{A_m + A_{m-1}x + \ldots + A_1 x^{m-1}}{x^m}\right) y = 0,$$

hvor H og ϱ ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, henholdsvis af Graden h og $h-1$, har intet endeligt explicit Integral, med mindre

m er et lige Tal;

det **kan** da være af Formen

$$y = X e^{\int (H + N x^{-\frac{1}{2}m}) dx},$$

hvor X og N ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, den første af Graden r, den sidste af Graden $\frac{1}{2}m-1$ og med det konstante Led $\sqrt{A_m}$, **saafremt** de ubekjendte Størrelser

r, Koefficienterne i X og N, $\quad r+\frac{1}{2}m$ i Antal,

kunne bestemmes saaledes, at de tilligemed Koefficienterne i H og ϱ samt A_1, $A_2 \ldots . A_m$ tilfredsstille $r+h+m-1$ Ligninger. Ellers har Differentialligningen intet endeligt explicit Integral.

11. Antages i (1)

$$P = \frac{M}{N}, \tag{28}$$

hvor M og N ere hele rationale Funktioner, henholdsvis af m^{te} og n^{te} Grad, saa vil der i (7) indgaa

$$\frac{d.\frac{M}{N}}{dx} = \frac{M_1}{N^2}, \qquad \text{idet } M_1 = NM' - MN',$$

$$\frac{d^2.\frac{M}{N}}{dx^2} = \frac{M_2}{N^3}, \qquad \text{idet } M_2 = NM_1' - 2M_1N' \text{ o. s. v.},$$

almindeligt

$$\frac{d^r\frac{M}{N}}{dx^r} = \frac{M_r}{N^{r+1}}\,, \qquad \text{hvor } M_r = NM'_{r-1} - rM_{r-1}N'\,.$$

Da M og N kunne antages ingen fælles Faktorer at have, saa ville Størrelserne $M_1, M_2 \ldots$ heller ikke kunne have Faktorer fælles med N, saafremt N ikke indeholder ligestore Faktorer. Da dette Tilfælde faar væsentlig Indflydelse paa Formen af (7) bragt paa hel Form, udelukkes det her. Det er et saadant Tilfælde, som forudsættes ved (9), der svarer til $N = x^m$.

Man maa nu multiplicere (7) med N^μ for at bringe den paa hel Form, hvorved dannes

$$N^\mu u^{(\mu+1)} - E_2 M N^{\mu-1} u^{(\mu-1)} - E_3 M_1 N^{\mu-2} u^{(\mu-2)} - \ldots\ldots - \mu M_{\mu-1} u = 0\,.$$

Denne Ligning kan ikke tilfredsstilles af noget algebraisk rationalt u med Nævneren $(x-\alpha)^\beta$, som ikke findes i N, fordi der vilde fremkomme et og kun et Led med Nævneren $(x-\alpha)^{\beta+\mu+1}$, som ikke kan bringes til at forsvinde. Derimod kunde man tænke sig u indeholde en Faktor X af N i en Potens, saasom X^β. Men det første Led vil da komme til at indeholde $X^{\beta+1}$ i Nævneren, idet N indeholder denne Faktor kun en Gang, medens alle de følgende Led kun faa X^β i Nævneren, hvilket ses af det almindelige Led $-E_{k+1} M_{k-1} N^{\mu-k} u^{(\mu-k)}$. Ved Dekompositionen af disse brudne Funktioner faas atter af første Led Brøker, der ikke kunne forsvinde af Ligningen. u kan altsaa ikke være brudden irrational.

Skulde u være hel rational af Graden γ, saa maatte det første Led være af Graden

$$n\mu + \gamma - \mu - 1\;;$$

det almindelige Led bliver af højere Grad, fordi $M_1, M_2 \ldots$ ere af voxende Grader, M_r nemlig af Graden $m + r(n-1)$, altsaa dets Grad er

$$m + (\mu - 1)n + \gamma - \mu + 1\;.$$

Da dette er uafhængigt af k, bestemmes derved Graden af alle Led efter det første. Dette kan derfor ikke forsvinde, med mindre Graderne ere ligestore, altsaa

$$m = n - 2\;.$$

I alle andre Tilfælde kan altsaa u ikke være algebraisk rational.

12. Undersøgelsen af Beskaffenheden af y i (1), naar (28) gjælder, kan for den største Del ske ved en Gjentagelse af det i Slutningen af 3 og i 4—6 udviklede, naar deri blot P erstattes ved $\frac{M}{N}$. Alle de Ligninger, hvori P indgaar, blive nemlig af hel

Form ved Multiplikation med N, saa at alle de forhen gjorte Slutninger staa ved Magt, naar blot ikke $m = n - 2$, i hvilket Tilfælde man ikke kan bevise, at (1) ikke kan have noget Integral, som er Rod i en algebraisk Ligning.

Udbyttet heraf bliver da først, at hvis (1) skal have et endeligt explicit Integral, naar P er bestemt af (28), dog ikke saaledes at $m = n - 2$, saa maa det være af Formen

$$y = \varphi e^v ,$$

hvor φ og v ere transcendente af samme Orden. Dernæst, naar man sætter

$$y = e^{\int t dx},$$

saa maa t have algebraisk rational Form som

$$t = H + \Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} \tag{18}$$

med samme Betydning af Bogstaverne som forhen.

13. Sætter man nu

$$P = \frac{M}{N} = Q + \frac{R}{N} ,$$

saa kan Q antages at være af Graden $m - n$ for $m \geqq n$, men ellers nul, og R höjest af $(n-1)^{\text{te}}$ Grad. Derefter vil Differentialligningen til Bestemmelse af t blive

$$t' + t^2 = Q + \frac{R}{N} .$$

Ved Indsættelse af Udtrykket for t faar man

$$H' - \Sigma \frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}} + H^2 + 2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} + \left(\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha}\right)^2 = Q + \frac{R}{N} ,$$

som af hele Led indeholder

$$H' + H^2 + H_1 - Q ,$$

idet H_1 er bestemt ved Dekomposition af

$$2H\Sigma \frac{K}{(x-p)^\alpha} = H_1 + \Sigma \frac{L}{(x-p)^\alpha} ,$$

hvor L er konstant. De hele Led af höjest Orden ere H^2 og Q, og for at disse skulle kunne forsvinde, maa

$$m - n = 2h ,$$

eller P maa være af lige Grad for at (1) skal have et endeligt explicit Integral. Sætter man

$$Q = H^2 + \varrho ,$$

saa er H et helt Polynomium, som faas ved at uddrage Kvadratroden, medens ϱ er den ved Roduddragningen frembragte Rest, höjest af Graden $h-1$.

I de brudne Led

$$-\Sigma\frac{\alpha K}{(x-p)^{\alpha+1}}+\Sigma\frac{L}{(x-p)^{\alpha}}+\left(\Sigma\frac{K}{(x-p)^{\alpha}}\right)^2-\frac{R}{N}$$

kunne Størrelserne $x-p$ enten gaa op i N eller ikke indeholdes deri. Gaa de ikke op i N, saa maa de indbyrdes hæve hverandre og dertil kræves ligesom i 8, at

$$2\alpha = \alpha+1 \quad \text{og} \quad \alpha K - K^2 = 0,$$

saa $\alpha=1$ og $K=1$ eller $K=0$, hvilken sidste Værdi her ikke tør forkastes, men den kommer rigtignok ikke til praktisk Anvendelse, med mindre alle K ere nul. Er $x-p$ Faktor i N, saa maa den i Følge Forudsætningen kun findes en Gang deri; skulle altsaa alle Led med saadanne $x-p$ falde bort imod $\frac{R}{N}$, saa maa de Brøker med höjere end første Potens hæve hverandre, altsaa atter $\alpha=1$ og $K=1$, hvorimod her $K=0$ maa forkastes. Alle Faktorerne indgaa altsaa i t's Nævnere og man faar

$$t = H+\frac{1}{x-p_1}+\frac{1}{x-p_2}+\ldots\frac{1}{x-p_{r+n}},$$

hvor dog nogle af Nævnerne kunne være fremmede for N. Derefter bliver

$$y = XNe^{\int H dx}, \tag{29}$$

idet X er en hel algebraisk rational af den ubekjendte Grad r. (29) er under de gjorte Forudsætninger det eneste mulige Integral under endelig explicit Form.

14. Indføres (29) i (1), faar man

$$NX''+2(N'+NH)X'+(N''+2N'H+NH')X = (\varrho N+R)X.$$

Leddene af den höjeste Grad, $n+h+r-1$, bestemme ogsaa her r ved, at deres Koefficienters Sum bliver nul. Sætter man

$$N = ax^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$
$$R = ex^{n-1}+e_1x^{n-2}+\ldots+e^{n-1},$$

faas

$$2abr+2nab+hab = ga,$$

altsaa

$$2r = \frac{g}{b}-2n-h,$$

som maa være et positivt lige Tal.

Da Ligningens Grad er $n+h+r-1$, faar man $n+h+r$ Ligninger at tilfredsstille ved de $r+1$ ubekjendte r, c, $c_1 \ldots c_r$, saa at der endda bliver $n+h-1$ Betingelser, som de givne Koefficienter i H, ϱ, R og N skulle tilfredsstille.

Herved er da bevist følgende

Theorem.

Differentialligningen

$$y'' - \left(H^2 + \varrho + \frac{R}{N}\right) y = 0 ,$$

hvor H, ϱ, R og N ere hele rationale algebraiske Funktioner af x, hvis Grader ere for H og N henholdsvis h og n, for ϱ og R i det höjeste $h-1$ og $n-1$ (dog ikke $H = \varrho = 0$ og R af Graden $n-2$), og N ikke indeholder ligestore Faktorer, kan **kun** have endeligt explicit Integral af Formen

$$y = XNe^{\int Hdx},$$

hvor X er hel rational af Graden r, **saafremt** de ubekjendte, r og Koefficienterne i X, kunne bestemmes saaledes, at de tilligemed de givne Polynomiers Koefficienter tilfredsstille $n+h-1$ Betingelser.